

Title	Heegaard splittingsのある不変量について(3・4次元多様体における位置と構造)
Author(s)	菅野, 仁子
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 487: 18-32
Issue Date	1983-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/103484">http://hdl.handle.net/2433/103484</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## Heegaard splittings のある不変量について

津田塾大 菅野仁子(Jinko Kanno)

本稿は、津田塾大の福原真二先生と著者との、Heegaard splittings の invariant についての共同研究を概括したものである。

$M^3$  を、連結可附向 3 次元閉多様体とすると、三角形分割可能なことから、 $M^3$  は、種数  $g$  の Heegaard splitting を持つ。この時、Heegaard splittings に対する不変量が、以下のように定義できるが、いわゆる Heegaard diagram から計算可能な行列の class である。以下に、定義と、応用例を述べる。

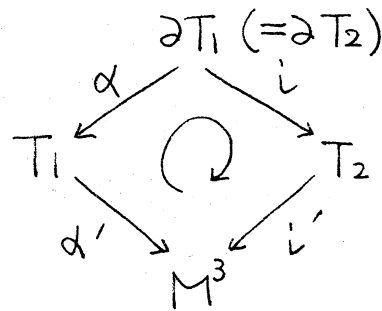
### §1 不変量の定義

まず、Heegaard splitting の定義をする。

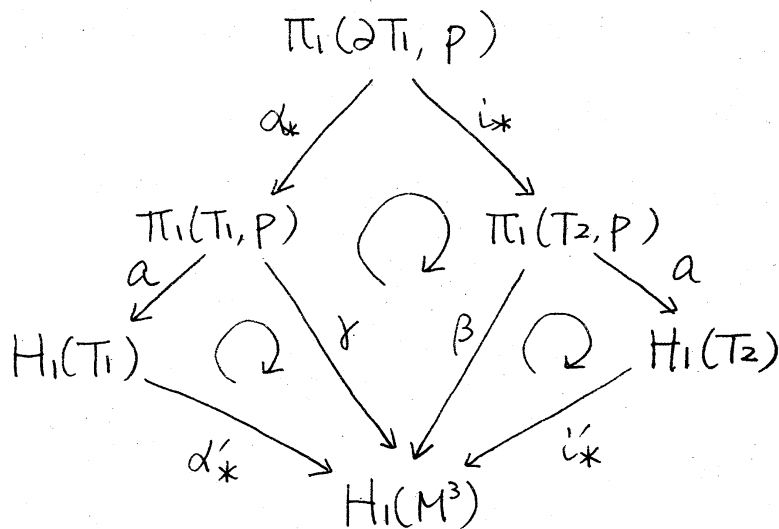
定義 種数  $g$  の可附向ハンドル体  $T_1, T_2$  に対し、 $M^3 = T_1 \cup T_2$ ,  $T_1 \cap T_2 = \partial T_1 = \partial T_2$  と表わされる時、 $M^3$  は種数  $g$  の Heegaard splitting を持つと言ひ、 $(M^3; T_1, T_2)$  又は、 $\partial T_1 = \partial T_2 = \mathcal{F}$

として、 $(M^3, \mathcal{F})$  と書く。□

$M^3$  が、種数  $g$  の Heegaard splitting  $(M^3; T_1, T_2)$  を持つ時、包含写像から成る次のような可換な図式が、存在する。



又、次のような、群の準同型写像を考える。



ここで、基本群の基点  $p$  は、 $p \in \partial T_1 = \partial T_2$  に固定して考えるものとする。 $a$  は、可換化準同型写像である。上の準同型写像について、群環への自然な拡張準同型写像も、同じ記号で、書くことにする。

次に、 $T$  を種数  $g$  のハンドル体、 $D$  を  $\partial T$  上のある 2-disk で、点  $p$  を含まないとする時、 $T$  の  $m$ - $\ell$  系を次のように、定

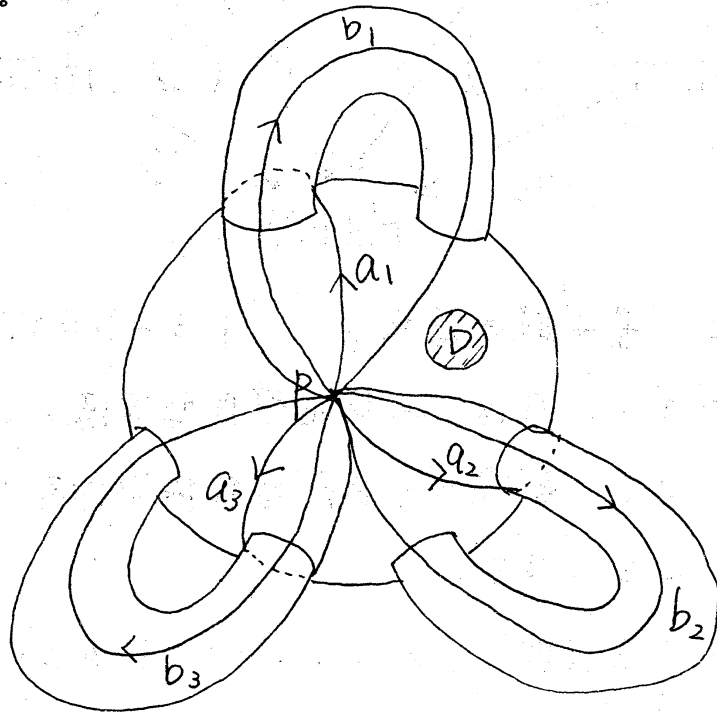
義する。

定義  $T$  を、種数  $g$  のハンドル体とする。  $\partial T - \bar{D}$  上の  $P$  を通り、どの2つも  $P$  以外には共通部分を持たない  $2g$  本の有向単純閉曲線  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  が、次の条件を満たす時  $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$  を  $T$  の  $m$ - $l$  系 と呼ぶ。

1) 各  $a_i$  は、 $T$  内に proper に埋蔵された 2-disk の境界になっている。

2)  $\partial T$  を、 $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  に沿って切り開くと、 $P$  を頂点とする  $4g$  角形に PL 同相で、その辺は、 $a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1, \dots, a_g^{-1} b_g^{-1} a_g b_g$  の順に並んでいる。□

$T$  の  $m$ - $l$  系を  $g=3$  のとき、図で示すと、たとえば、下のようになる。



さて、代数的な定義を少ししておく。

定義 (Fox [4]) 群  $H$  の群環  $\mathbb{Z}H$  の元  $v$  に対し、 $\bar{v}$  を次のように定義する。 $v = \sum_{x \in H} r_x x$ ,  $r_x \in \mathbb{Z}$  の時、 $\bar{v} \equiv \sum_{x \in H} r_x x^{-1}$  とする。□

定義 (Fox [3]) 自由群  $F(x_1, \dots, x_n)$  の群環  $\mathbb{Z}F(x_1, \dots, x_n)$  から自分自身への写像  $\partial/\partial x_j$  が、次の 1) 2) を満たす時、 $\partial/\partial x_j$  を  $\mathbb{Z}F_n$  上の  $x_j$  に関する自由微分と言う。

$$1) \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \text{ (クロネッカーのデルタ)}$$

2)  $u, v \in \mathbb{Z}F_n$  の時、

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} v^\circ + u \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

ここで、 $v = \sum_{w \in F_n} r_w w$ ,  $r_w \in \mathbb{Z}$  ならば、 $v^\circ = \sum_{w \in F_n} r_w \in \mathbb{Z}$  である。□

ここまでの準備のもとに、次のような行列を考えることができるが、後に述べる定理から、その行列のある class が Heegaard splittings の不変量になり、といることが、わかる。

定義  $M^3$  の種数  $g$  の Heegaard splitting  $(M^3; T_1, T_2) = (M^3, \mathcal{F})$  に対し、 $T_1$  の  $m$ - $\ell$  系  $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$  と、 $\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \dots, x_g)$  を定めることにより、 $\mathcal{F}$  で定義される。次の行列を  $A_{\mathcal{F}}(a, b, \mathcal{F})$  と書く。ただし、 $a_k^*$  は、 $a_k$  を  $\pi_1(T_1, p)$  の元と見た時の  $i_*$  による像  $i_*(a_k)$  のことである。又、行列の肩に書

いた  $\beta$  は、行列の各成分に施されるものとする。

$$A_{\mathcal{F}}(a, b, X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_k^{i*}}{\partial X_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial b_k^{i*}}{\partial X_j} \end{pmatrix}^{\beta} . \quad \square$$

注)  $A_{\mathcal{F}}(a, b, X)$  は、 $\mathbb{Z} H_1(M^3)$  を係数とする、 $2g \times g$  行列である。

$M^3$  のひとつの Heegaard splitting に対して、 $a, b, X$  のとり方は、一意的ではないが、次の定理が成り立つ。

定理 1  $M^3$  の Heegaard splitting  $(M^3; T_1, T_2) = (M^3, \mathcal{F})$  をひとつ固定した時、 $A_{\mathcal{F}}(a, b, X)$  と  $A_{\mathcal{F}}(a', b', X')$  の間には、次の関係がある。

$\exists U, G$  ;  $\mathbb{Z} H_1(M^3)$  を係数とする  $g \times g$  可逆行列で、  
 $\det U, \det G \in \pm H_1(M^3)$

$$\text{s.t. } A_{\mathcal{F}}(a', b', X') = \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & {}^*U^{-1} \end{pmatrix} A_{\mathcal{F}}(a, b, X) (G)$$

ここで、 $U = (u_{ji})$  の時、 ${}^*U = (\overline{u_{ji}})$  と定める。  $\square$

同様なことが、 $M^3$  の 2 つの強同値な Heegaard splittings から定義される行列  $A_{\mathcal{F}}, A_{\mathcal{F}'}$  についても成り立つ。

定義 (Birman [2])  $X_g$  を、種数  $g$  の向き付けられたハンドル体とする。 $X_g$  を、位相同型写像  $\tau$  で写した像  $\tau(X_g)$  を  $X_g'$

と書き、 $Xg$ からの向きを受け継いでいるものとせよ。その時、 $\partial Xg$ と $\partial Xg'$ を向きを保たない位相同型写像 $h$ で、同一視して得られる可附向3次元閉多様体 $M^3$ を、種数 $g$ の Heegaard splitting によ、 $\Sigma$ 表現されていると言ひ、 $h$ を 貼り合わせ写像と呼ぶ。□

定義 (Birman [2])  $M^3$ の2つの Heegaard splittings  $(M^3; T_1, T_2)$ ,  $(M^3; T_1', T_2')$  が、強同値であるとは、それぞれの貼り合わせ写像を、 $h, h'$ とある時、次の図式が可換で、しかも、 $f_1, f_2$ は、 $T_1, T_2$ への拡張位相同型写像をそれぞれ持つことである。

$$\begin{array}{ccc} \partial T_1 & \xrightarrow{h} & \partial T_2 \\ f_1 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f_2 \\ \partial T_1' & \xrightarrow{h'} & \partial T_2' \end{array}$$

□

定理 1'  $M^3$ の2つの種数 $g$ の Heegaard splittings  $(M^3; T_1, T_2) = (M^3; \mathcal{F})$ ,  $(M^3; T_1', T_2') = (M^3; \mathcal{F}')$  が、強同値ならば、それぞれに対応する行列  $A_{\mathcal{F}}, A_{\mathcal{F}'}$  には、次の関係がある。  
 $\exists U, G; \mathbb{Z}H_1(M^3)$  を係数とする  $g \times g$  可逆行列で、

$$\det U, \det G \in \pm H_1(M^3)$$

$$\text{s.t. } A_{\mathcal{F}'} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & *U^{-1} \end{pmatrix} A_{\mathcal{F}}(G)$$

□

従,  $z$ .  $A_g$  に定理 1' の条件を満たす任意の  $\begin{pmatrix} U & 0 \\ W & U^{-1} \end{pmatrix}$  を  
 左から  $(G)$  を右から掛けた行列全体は,  $M^3$  の強同値な  
 Heegaard splittings に対して不変である。これが、不変量の  
 定義である。

定理 1' の証明は、定理 1 の証明と本質的に同じなので、  
 定理 1 の証明を次の § で述べる。

## § 2 定理 1 の証明

$T$  を種数  $g$  のハンドル体とする時、次の 2 つの命題が  
 成り立つ。点  $p \in \partial T$  とする。

命題 1  $f$  を  $T$  から  $T$  への位相同型写像で、 $f(p) = p$  とする。

この時、 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$  が、 $T$  の  $m$ - $l$  系ならば、 $\{f(a_i), f(b_i)\}_{i=1}^g$   
 も  $T$  の  $m$ - $l$  系である。□

命題 2  $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g, \{a'_i, b'_i\}_{i=1}^g$  が、 $T$  の 2 つの  $m$ - $l$  系ならば、

$T$  から  $T$  への  $p$  を保つ位相同型写像  $f$  が存在して、 $f(a_i) =$   
 $a'_i, f(b_i) = b'_i \quad i=1, \dots, g$  となる。□

また、自由微分に関して、次の事実が知られている。

命題 3 ( $F_0 X[3]$ )  $\lambda$  を自由群  $F(y_1, \dots, y_n)$  から自由群  $F(x_1, \dots,$

$\dots, x_m)$  の中への準同型写像、 $\mu$  を群環  $\mathbb{Z} F(y_1, \dots, y_n)$  の元  
 とすると次が成り立つ。



$$\frac{\partial v^\wedge}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial v}{\partial y_k} \right)^\wedge \frac{\partial y_k^\wedge}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, m. \quad \square$$

命題4 (Birman [1]) 階数  $n$  の自由群  $F_n$  が、二組の自由基底  $x_1, \dots, x_n$  および  $y_1, \dots, y_n$  を持つ時、 $\mathbb{Z} F_n$  の元  $v$  は、2通りに表現できるが、次が成り立つ。

$$\frac{\partial v}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \quad j=1, \dots, n. \quad \square$$

以上のこと、特に、命題3から次の補題が導かれる。

補題1  $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$  を  $T_1$  の  $m$ -l系,  $f$  を  $T_1$  から  $T_1$  への位相同型写像で、 $p$  を保つとすると、 $f(a_i) = a_i'$ ,  $f(b_i) = b_i'$ ,  $\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \dots, x_g)$  のとき、次が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_i'^{i*}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial b_i'^{i*}}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_i'}{\partial a_k} & \frac{\partial a_i'}{\partial b_k} \\ \frac{\partial b_i'}{\partial a_k} & \frac{\partial b_i'}{\partial b_k} \end{pmatrix}^{i*} \begin{pmatrix} \frac{\partial a_k^{i*}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial b_k^{i*}}{\partial x_j} \end{pmatrix} \quad \square$$

そして、次の定理2は、定理1の証明において、一番本質的である。

定理2  $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g, \{a_i', b_i'\}_{i=1}^g$  を  $T_1$  の  $m$ -l系とする時、次が成り立つ。ここに、行列の成分は、 $\pi_1(T_1, p) \cong F(y_1, \dots, y_g)$  の群環の元である。

$$\left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial a'_i}{\partial a_k} & \frac{\partial a'_i}{\partial b_k} \\ \hline \frac{\partial b'_i}{\partial a_k} & \frac{\partial b'_i}{\partial b_k} \end{array} \right)^{\alpha*} = \left( \begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline W & *U^{-1} \end{array} \right)$$

さらに、 $\det U \in \pm \pi_1(T_1, P)$  である。□

以下、定理2の証明に没頭する。

補題2

$$G_H \equiv \left\{ \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & *U^{-1} \end{pmatrix}; U, W \text{ は } H \text{ を係数とする } g \times g \text{ 行列で } U \text{ は可逆行列.} \right\}$$

は、行列の積に関して群をなす。ここで  $H$  は任意の代数系とする。

補題3 記号は、補題2と同じ仮定のもとに、 $\varphi$  を群環  $H$  から

群環  $H'$  への準同型写像で、 $H$  の任意の元  $x$  に対し、

$$\varphi(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)} \text{ が成り立つものとする。}$$

この時、 $(*U^{-1})^\varphi = *(U^\varphi)^{-1}$  であって、特に

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ W & *U^{-1} \end{pmatrix}^\varphi = \begin{pmatrix} U^\varphi & 0 \\ W^\varphi & *(U^\varphi)^{-1} \end{pmatrix} \text{ より } \varphi(G_H) \subset G_{H'}$$

が成り立つ。□

$T$  を、種数  $g$  のハンドル体とすると、次が知られている。

命題5 (S. Suzuki [5])  $T$  の写像類群は、次の6つの位相同型写像で生成される。

$f_i$ : ハンドルの巡回的変換。

$f_2$ : knob の twisting

$f_3$ : ハンドルの twisting

$f_4$ : 2つの knobs の交換

$f_5$ : Sliding  $\theta$

$f_6$ : Sliding  $\xi$  □

これらの  $f_i$  について、次が成り立つことが、確かめられる。

補題 4  $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$  を  $T_1$  の  $m$ -l 系とする。  $f$  を  $T_1$  から  $T_1$  への位相同型写像で、  $f_1, \dots, f_6, f_1^{-1}, \dots, f_6^{-1}$  のいずれかとする。

$a'_i = f(a_i)$ ,  $b'_i = f(b_i)$  とすると次が成り立つ。

$$\left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial a'_i}{\partial a_j} & \frac{\partial a'_i}{\partial b_j} \\ \hline \frac{\partial b'_i}{\partial a_j} & \frac{\partial b'_i}{\partial b_j} \end{array} \right)^{a_*} = \left( \begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline \Omega & {}^*V^{-1} \end{array} \right), \quad \det V \in \pm \pi_1(T_1, p). \quad \square$$

上で、両辺は、 $\mathbb{Z} \pi_1(T_1, p)$  を係数とする  $2g \times 2g$  行列である。命題 5 より、 $T_1$  から  $T_1$  への任意の位相同型写像  $f$  は、 $f = f_{i_1}^{e_1} \cdots f_{i_n}^{e_n}$ ,  $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ,  $e_j = \pm 1$  と書けるから、 $n$  に関する数学的帰納法より、定理 2 が導かれる。

定理 2 によ、て、定理 1 の左から掛ける行列については解決したが、右から掛ける行列については、次の補題で解決する。補題 5 の証明は、命題 4 と、Birman [1] から明らかで

ある。

補題 5  $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$  を  $T_1$  の  $m$ -元系,  $\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \dots, x_g)$   
 $\cong F(x'_1, \dots, x'_g)$  とすると, 次が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_i^{i*}}{\partial x'_j} \\ \frac{\partial b_i^{i*}}{\partial x'_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_i^{i*}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial b_i^{i*}}{\partial x_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \end{pmatrix}$$

しかも,  $\det\left(\frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\right) \in \pm F(x'_1, \dots, x'_g)$  である。□

### §3 応用

§1 で定義された Heegaard splittings の不変量を使, レンズ空間のあるものは区別することができる。定理の形で正確に述べると、次のようになる。

定理 3  $L(p, 1) \cong L(p, q) \Rightarrow q \equiv \pm 1 \pmod{p}$  □

証明は、連結可附向る次元関多様体  $M^3$  の任意の Heegaard splittings は、いくつかの自明な分解をつけ加えることによって、強同値な分解になる (Reidemeister-Singer) ことを使う。以下、具体的に証明を述べる。

レンズ空間の定義から、 $L(p, 1)$ ,  $L(p, q)$  という書き方は、種数 1 の Heegaard splitting をそれぞれ与えている。今、 $(q-1)$  個の自明な分解をつけ加えることによって、 $L(p, 1)$

と  $L(p, q)$  は、強同値な Heegaard splittings になつたと仮定する。それぞれの Heegaard splittings を記号で次のように書くとする。

$$L(p, 1) = T_1 \cup T_2, \quad T_1 \cap T_2 = \partial T_1 = \partial T_2$$

$$L(p, q) = T_1' \cup T_2', \quad T_1' \cap T_2' = \partial T_1' = \partial T_2'$$

$\{a_i, b_i\}_{i=1}^g, \{a_i', b_i'\}_{i=1}^g$  を  $T_1, T_1'$  の  $m$ - $l$  系,

$\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \dots, x_g), \pi_1(T_2', p) \cong F(x_1', \dots, x_g')$  とする

時、次のようにみなすことができる。

$$a_1^{i*} = x_1^p, a_j^{i*} = x_j \quad (j=2, \dots, g), \quad b_1^{i*} = x_1, b_j^{i*} = 1 \quad (j=2, \dots, g)$$

$$a_1^{i' *} = x_1'^p, a_j^{i' *} = x_j' \quad (j=2, \dots, g), \quad b_1^{i' *} = x_1'^g, b_j^{i' *} = 1 \quad (j=2, \dots, g)$$

従つて、自由微分を行なうと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_k^{i*}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial b_k^{i*}}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |1+x_1+\dots+x_{g-1}| & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^\beta = t^r, (p, r) = 1$$

$$H_1(M^3) \cong \langle t | t^p = 1 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_k^{i' *}}{\partial x_j'} \\ \frac{\partial b_k^{i' *}}{\partial x_j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |1+x_1'+\dots+x_{g-1}'| & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ |1+x_1'+\dots+x_{g-1}'| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{\beta'} = t$$

$$H_1(M^3) \cong \langle t | t^p = 1 \rangle$$

各成分にそれぞれ  $\beta, \beta'$  を施した行列を  $\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix}$  と書くことにすると次が成り立つ。

$$R=R'=\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \hline & E \end{array}\right), \alpha=1+t+\dots+t^{p-1}, E \text{ は } (q-1)\text{-次単位行列}$$

$$S=\left(\begin{array}{c|c} s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), s=1, \quad S'=\left(\begin{array}{c|c} s' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), s'=1+t+\dots+t^{q-1}$$

$\begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$  は定理1'の関係を満たすことから次が成り立つ。

$$\exists U, G \quad U=\left(\begin{array}{c|c} u_{11} & u_{12} \\ \hline u_{21} & u_{22} \end{array}\right), G=\left(\begin{array}{c|c} g_{11} & g_{12} \\ \hline g_{21} & g_{22} \end{array}\right)$$

$\det U, \det G \in \pm H_1(M^3)$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & *U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} (G)$$

$$\text{ゆえに} \quad \textcircled{1} UR=RG \quad (\because R=R') \quad \textcircled{2} *UWR+S' = *USG \quad (\because R=R')$$

$$\textcircled{1} \text{より} \quad \textcircled{3} \quad u_{11} \equiv \pm t^l g_{11} \pmod{\alpha} \quad \because \det U = \pm t^k, \det G = \pm t^m$$

③の(1,1)成分を  $\text{mod } \alpha$  で比較することを考えて

$$s' \equiv \overline{u}_{11} s g_{11} \pmod{\alpha} \text{ となるゆえ } 1+t+\dots+t^{q-1} \equiv \overline{u}_{11} g_{11} \pmod{\alpha}$$

$$\textcircled{3} \text{ を代入して } \overline{g}_{11} g_{11} \equiv \pm t^l (1+t+\dots+t^{q-1}) \pmod{\alpha}$$

$$\text{ゆえに } \overline{g}_{11} g_{11} \pm t^l (1+t+\dots+t^{q-1}) + f(t) (1+t+\dots+t^{p-1}) = 0$$

$$\text{両辺に } (1-t) \text{ を掛けて } \quad \textcircled{4} \quad \overline{g}_{11} g_{11} (1-t) = \pm t^l (1-t^q)$$

$$\textcircled{4} \text{ で } t=1 \text{ を代入すると } \quad \textcircled{5} \quad \overline{g}_{11} g_{11} (1-1) = \pm t^{l-q+1} (1-1^q)$$

$$\textcircled{4} \text{ と } \textcircled{5} \text{ を比較して } \quad \textcircled{6} \quad 2l \equiv 1-q \pmod{p}$$

$$\textcircled{4} \text{ で } g_{11} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i t^i, a_i \in \mathbb{Z} \text{ を代入すると左辺の定数項は}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-1} (a_i - a_{i+1})^2, \text{ ただし } a_p = a_0, \text{ となる。}$$

④において⑥を考慮しながら、右辺の定数項と比較すると、次のように場合分けできる。

- 1)  $l \equiv 0 \pmod{p}$  ならば  $g \equiv 1 \pmod{p}$  である。
- 2)  $l+g \equiv 0 \pmod{p}$  ならば  $g \equiv -1 \pmod{p}$  である。
- 3)  $l \not\equiv 0, l+g \not\equiv 0 \pmod{p}$  ならば、右辺の定数項は、0に等しい。ゆえに、 $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1}$  である。

この時、④の左辺  $= \overline{g_1} g_1 (1-t) = a_0^2 (1-t) \sum_{i=0}^{p-1} t^i \sum_{j=0}^{p-1} t^{-j} = 0 \because t^p = 1$   
 従って④の右辺を考えると、 $g \equiv 0 \pmod{p}$  となければならないが、これは仮定に反するので、3)は起こらないことがわかる。//

### References

- [1] J.S. Birman, An inverse function theorem for free groups, Proc. of the Amer. Math. Soc. (1973), 634-638.
- [2] ———, On the equivalence of Heegaard splittings of closed, orientable 3-manifolds, In Knots, groups, and 3-manifolds (L. P. Neuwirth, Editor). Princeton Univ. Press, Annals of Math. Studies No. 84 (1975), 137-164.
- [3] R. H. Fox, Free differential calculus. I, Ann. of Math. 57 (1953), 547-560.
- [4] ———, Free differential calculus. II, Ann. of Math.

59(1954), 196-210.

[5] S. Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, Can. J. Math. (1977), 111-124.

[5'] ———, 閉曲面の写像類群, 数理解析研究所講究録 297 (1977), 1-23.